CENTRE
DE
VANVES

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
CENTRE NATIONAL D'ENSEIGNEMENT A DISTANCE

AGREGATION DE MATHEMATIQUES -407-
PROFESSEUR : M. C. SERVIEN

A.2075.D.03
Devoir 3 - Série 5

COMPOSITION D'ANALYSE 1981

DURÉE : 6 heures

PRÉAMBULE

Tous les polynômes considérés dans ce problème sont à coefficients complexes, les fonctions polynomiales étant définies sur $\mathbb{C}$.

A. *Notations.*

Les propriétés mentionnées ci-dessous en A. 3. et A. 4. n'ont pas à être démontrées.

A. 1. D désigne le disque unité fermé : $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$.

U désigne le disque unité ouvert : $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Γ désigne le cercle unité : $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

A. 2. A tout polynôme A non identiquement nul, de degré k, on associe le polynôme A^* défini de la manière suivante :

si $$A(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k \quad (a_k \neq 0),$$

alors $$A^*(z) = \overline{a_k} + \overline{a_{k-1}}\, z + \dots + \overline{a_0}\, z^k .$$

A. 3. H désigne l'espace de Hilbert des (classes de) fonctions de carré intégrable sur Γ par rapport à la mesure de Lebesgue, pour le produit scalaire :

$$(f \mid g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} \, dt.$$

La norme correspondante sera notée $\| \cdot \|$.

A. 4. Soit P un polynôme non identiquement nul. H_P désigne l'ensemble des (classes de) fonctions f telles que le produit fP appartienne à H.

Le produit scalaire $(f \mid g)_P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} \mid P(e^{it}) \mid^2 dt$ munit H_P d'une structure d'espace de Hilbert. La norme correspondante sera notée $\| \cdot \|_P$.

A. 5. Pour tout entier naturel n, E_n désigne l'espace vectoriel des polynômes dont le degré ne dépasse pas n, y compris le polynôme 0.

B. *Propriété admise.*

On utilisera sans démonstration le résultat suivant : étant donné un polynôme P non identiquement nul, il existe une suite unique $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes telle que :

1° Φ_n soit de degré exactement n, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$;

2° le coefficient du terme de degré n de Φ_n soit strictement positif pour tout $n \in \mathbb{N}$;

3° les Φ_n forment une famille orthonormée dans H_P.

Pour tout entier naturel n, on notera k_n le coefficient du terme de degré n de Φ_n.

PREMIÈRE PARTIE

QUESTIONS PRÉLIMINAIRES

Certains des résultats de cette partie seront utiles pour la suite du problème.

I.1. Soit A un polynôme non identiquement nul.

a. Quels sont, en fonction des zéros de A, les zéros de A^*, ainsi que leurs ordres de multiplicité ?

b. Comparer $\mid A(z) \mid$ et $\mid A^*(z) \mid$ pour z appartenant à Γ.

I.2. Soit A un polynôme non identiquement nul ayant au moins un zéro dans U. Montrer qu'il existe au moins un polynôme B tel que :

1° B n'ait aucun zéro dans U ;

2° $\mid A(z) \mid = \mid B(z) \mid$ pour tout z de Γ ;

3° $\mid A(z) \mid < \mid B(z) \mid$ pour tout z de U ;

4° B ait un degré inférieur ou égal à celui de A.

Trouver un polynôme A auquel on puisse associer un polynôme B de degré strictement inférieur au degré de A, et vérifiant les propriétés 1° à 4° ci-dessus. Trouver un polynôme A pour lequel ce soit impossible.

I.3. Soient A un polynôme n'ayant aucun zéro dans U, et ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un polynôme B tel que :

1° $B(0) = A(0)$;

2° B n'ait aucun zéro dans D ;

3° pour tout z de Γ, $|A(z)| \leqslant (1+\varepsilon)\,|B(z)|$.

I.4. Soit A un polynôme. Établir :

a. l'égalité $A(0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} A(e^{it})\,dt$;

b. l'inégalité $|A(0)|^2 \leqslant \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |A(e^{it})|^2\,dt$.

I.5. Soit P un polynôme non identiquement nul. La suite $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui lui est associée (partie B du Préambule) est-elle totale dans H_P ?

DEUXIÈME PARTIE

P est un polynôme non identiquement nul; $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la famille orthonormée de H_P qui lui est associée, conformément au B du Préambule.

II.1. Soient a un nombre complexe et n un entier naturel. Montrer que, lorsque A parcourt l'intersection de E_n et de la sphère unité de H_P, l'expression $|A(a)|$ passe par un maximum. Déterminer les polynômes A pour lesquels ce maximum, que l'on notera $M_n(a)$, est obtenu.

II.2. On suppose que a n'est pas nul. Comparer $M_n\left(\overline{a^{-1}}\right)$ et $M_n(a)$.

II.3. Pour un entier naturel n donné, soit S_n la fonction de deux variables complexes définie par $S_n(x, y) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \overline{\Phi_j(x)}\;\Phi_j(y)$.

Déduire de ce qui précède l'identité $S_n(x, y) = (\bar{x}y)^n\, S_n\left(\overline{y^{-1}}, \overline{x^{-1}}\right)$, pour x et y différents de zéro.

II.4. Montrer que, pour tout nombre complexe z, $S_n(0, z) = k_n \Phi_n^*(z)$ et établir l'égalité $\sum_{j=0}^{n} |\Phi_j(0)|^2 = k_n^2$.

II.5. On suppose $|a| < 1$. Montrer que, pour tout entier positif n, le polynôme $S_n(a, z)$ ne s'annule pour aucun z de U.

En déduire que, si n est un entier positif, tous les zéros de Φ_n appartiennent à D.

TROISIÈME PARTIE

P est toujours un polynôme non identiquement nul.

III.1. Soit n un entier strictement positif. Montrer que, lorsque A parcourt l'ensemble des polynômes de la forme $A(z) = z^n + B(z)$ avec $B \in E_{n-1}$, la norme $\| A \|_P$ passe par un minimum, et que ce minimum est obtenu pour un polynôme A unique que l'on déterminera. On notera m_n ce minimum; exprimer m_n à l'aide de k_n.

III.2. Montrer que la suite $(m_n)_{n>0}$ est convergente.

On notera m la limite de cette suite.

III.3. Montrer, en considérant le polynôme $\frac{1}{k_n} \Phi_n^*$, que l'on a, pour tout entier strictement positif n, $m_n \geqslant |P(0)|$.

III.4. On suppose, dans cette question, que P n'a aucun zéro dans D.

a. Montrer que, pour tout réel strictement positif ε, il existe un polynôme T tel que $\sup_{z \in D} \left| T(z) - \frac{1}{P(z)} \right| < \varepsilon$.

b. Montrer que, si ε est assez petit,

$$m^2 \leqslant \frac{1}{|T(0)|^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |T(e^{it}) P(e^{it})|^2 \, dt.$$

c. Montrer que $m = |P(0)|$.

III.5. Étendre le résultat de la question III.4.*c.* au cas où P n'a aucun zéro dans U.

III.6. P est maintenant quelconque (non identiquement nul). Exprimer m en fonction des zéros de P contenus dans U et de P (0), ou de l'une des dérivées de P en 0.

III.7. En déduire la nature de la série $\sum_{j=0}^{\infty} |\Phi_j(0)|^2$ et donner une expression de sa somme si cette série est convergente.

QUATRIÈME PARTIE

P est un polynôme non identiquement nul, dont on désignera par d le degré. Les polynômes Φ_n sont associés à P comme précédemment.

IV.1. *a.* Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un polynôme R_n unique, appartenant à E_n, tel que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1 - P(e^{it})\, R_n(e^{it})|^2\, dt = \inf_{A \in E_n} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1 - P(e^{it})\, A(e^{it})|^2\, dt.$$

Exprimer R_n à l'aide des polynômes Φ_j.

b. Montrer que si P est à coefficients réels, il en est de même pour R_n.

c. Montrer que R_n est identiquement nul si, et seulement si $P(0) = 0$.

d. On suppose que $P(0)$ n'est pas nul. Montrer que R_n n'a aucun zéro dans U.

P est désormais un polynôme de degré d, tel que $P(0) \neq 0$. Les polynômes R_n sont définis comme ci-dessus. Soit, pour tout entier naturel n, P_n l'unique polynôme appartenant à E_d rendant minimale l'expression

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1 - R_n(e^{it})\, A(e^{it})|^2\, dt,$$

lorsque A parcourt E_d.

IV.2. Montrer que, si P n'a aucun zéro dans U, la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans H_P vers $\frac{1}{P}$.

La réciproque de cette propriété est-elle exacte?

IV.3. Montrer que, si P n'a aucun zéro dans U, la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers P. On précisera éventuellement le mode de convergence.

IV.4. Montrer que, si P est astreint à la seule condition $P(0) \neq 0$, la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un polynôme que l'on déterminera.

IV.5. P étant toujours de degré d, avec $P(0) \neq 0$, soit d' un entier supérieur à d. Les polynômes R_n sont définis comme précédemment, et pour chaque entier naturel n, on appelle $p_{n,d'}$ l'unique polynôme de $E_{d'}$ rendant minimale l'expression $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1 - R_n(e^{it})\, A(e^{it})|^2\, dt$ lorsque A parcourt $E_{d'}$.

Que peut-on dire de la suite des polynômes $(P_{n,d'})_{n \in \mathbb{N}}$, d' étant fixé ?

IV.6. Retrouver à partir de ce qui précède une démonstration du fait suivant : si deux polynômes sans zéros dans U ont même module sur Γ, ils sont proportionnels.

